Otimização de um Processo de Produção de Farinhas utilizando Programação Linear

Vania Gryczak Gevert (Faculdades Campo Real) vaniagg2@hotmail.com
Maico Jeferson de Oliveira (Faculdades Campo Real) maico.j.oliveira@ibest.com.br
Matheuz Felizardo (Faculdades Campo Real) matheusgfelizardo@gmail.com

Resumo:
Este trabalho apresenta uma aplicação da programação linear em um problema real de uma indústria de farinhas no município de Guarapuava- Paraná. Um modelo matemático foi desenvolvido para a formalização do problema, que descreveu o cenário, com a função objetivo e as restrições. As soluções foram derivadas a partir de ferramentas de programação linear, utilizando o software *Solver* do *Excel*. O modelo foi validado por um funcionário da empresa, mostrando que a modelagem está de acordo com a proposição do problema.
Palavras chave: Pesquisa Operacional, Programação Linear, Modelagem Matemática, Produção de farinhas.

Title of the article in English

Abstract
This article shows an application of linear programming of a real problem in a flour industry in the city of Guarapuava – Paraná. A mathematical model was developed to formalize the problem, wich described the scenario, with the objective function and its restrinctions. The solutions were derived from the tools of linear programming, using the *Excel* software *Solver*. The model was approved by an employee of the company, showing that the modeling is in agreement with the proposition of the problem.

Key-words: Operational Research, Linear Programming, Mathematical Modeling, Flour Production.

1. Introdução

A origem da Pesquisa Operacional pode ser encontrada há quase 70 anos: aparentemente, o termo Pesquisa Operacional (P.O.) foi cunhado em 1938, para descrever o uso de cientistas na análise de situações militares (MOREIRA, 2010).

Na segunda guerra mundial existiam iniciativas militares para alocação de recursos escassos às várias operações militares e às atividades dentro de cada operação de uma maneira efetiva.

Após a guerra, foi natural estender o sucesso da P.O. no esforço de guerra para as organizações civis. Além disso, a indústria pós-guerra havia crescido muito e se deparava com os problemas causados pela crescente complexidade das organizações. Muitos estudiosos percebiam que, de certa forma, tais problemas eram parecidos com aqueles dos quais os militares tinham tratado, mas só que agora estavam em um contexto diferente (MOREIRA, 2010).

Em 1948 foi instituído o primeiro programa formal de estudos de Pesquisa Operacional (Estados Unidos) para campos não militares. Entre os anos de 1945 à 1970, foi instituído a "idade do ouro" da Pesquisa Operacional, devido à rápida expansão do seu uso. Dois fatores foram cruciais para o crescimento no período:

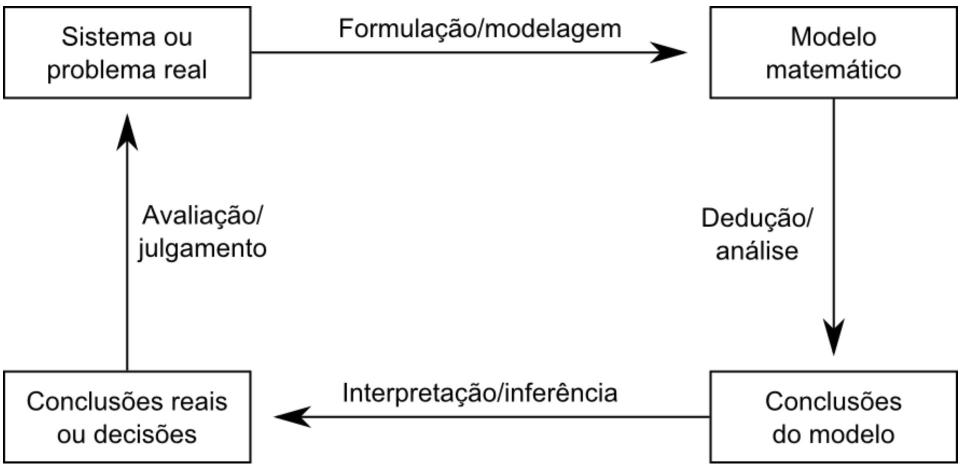
- Melhoria nas técnicas de P.O. com importantes avanços para a formulação dos problemas;
- Surgimento dos computadores digitais, tornando-se possível resolver problemas cada vez mais complexos.

No Brasil, na década de 60, a pesquisa operacional conquista os pesquisadores brasileiros. Em 1968, no município de São José dos Campos –SP, foi realizado o primeiro Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Em 1969, fundou-se a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO) com sede no Rio de Janeiro.

A P.O. lida com problemas de como conduzir e coordenar certas operações em uma organização, e tem sido aplicada a diversas áreas, tais como indústria, transportes, telecomunicações, finanças, saúde, serviços públicos, operações militares (MOREIRA, 2010).

Se fazer ciência é a capacidade de observar e descrever fenômenos naturais, sociais, econômicos entre outros, a matemática tem uma importância fundamental na descrição desses fenômenos. A partir das observações de fenômenos, processos ou sistemas, que podem ser físicos, químicos, biológicos, econômicos, buscam-se leis que os regem. Essas leis, se passíveis de serem descritas por relações matemáticas, dão origem aos modelos matemáticos.

Em geral, para formular um modelo matemático, simplificações razoáveis do sistema ou problema real precisam ser consideradas (em diferentes níveis) e a validação do modelo depende de a solução do modelo matemático ser coerente com o contexto original. Com isso, o modelo matemático é uma representação simplificada (abstração) do problema real. Ele deve ser suficientemente detalhado para captar os elementos essenciais do problema, mas suficientemente tratado por métodos de resolução. O diagrama da Figura 1 ilustra um processo simplificado da abordagem de solução de um problema usando a modelagem matemática.



Fonte: Arenales *et al.* (2007)

Figura 1 – Processo de modelagem

Segundo Passos (2008) não existe um número de fases definidas no estudo da P.O. Vai depender da complexidade do trabalho que se está realizando. Entretanto, de maneira geral, o estudo da P.O. pode ser dividido nas seguintes fases:

- Identificação ou determinação do problema;
- Estudo do problema;
- Construção do modelo;
- Resolução do modelo;
- Validação do modelo;
- Implementação do modelo.

Na primeira fase define-se precisamente o que será objeto de estudo. Na segunda fase são coletados todos os dados disponíveis, tendo a máxima precisão possível. A fase três traduz as fases um e dois em relações matemáticas (equações e/ou inequações). A fase quatro utiliza métodos de resolução conhecidos para resolver o modelo construído na fase três. Na fase cinco verifica-se se o modelo proposto representa apropriadamente o problema, ou seja, se o modelo prediz adequadamente o comportamento do sistema. A fase seis preocupa-se com a implementação da solução na prática, traduzindo os resultados do modelo em decisões.

Dentre as vertentes que compõem a P.O. assume papel relevante a Programação Linear (P.L.), que é uma técnica de programação matemática em que se procura maximizar ou minimizar uma função, sujeitando-a a certas restrições (limitações). Todas as equações e desigualdades (inequações) são lineares. Pode-se afirmar que a P.L. é um instrumento de alta relevância, visto que, proporciona um método eficiente para se chegar a uma decisão ótima, levando-se em consideração que é através dela que escolhemos a melhor solução, dentre todas aquelas que, são consideradas factíveis.

1.1 Modelagem de Problemas de Programação Linear

Mesmo com um gigantesco arcabouço teórica existente, na prática, a modelagem e a identificação do problema acontecem de forma bastante empírica e pessoal. Quando um problema do mundo real é identificado, a identificação acontece mais pela experiência e vivência da pessoa ou grupo que está fazendo a modelagem do que, por exemplo, se o problema atende às suposições da P.L.(COLIN, 2007).

Não há um algoritmo que auxilie a transformar um problema do mundo real num modelo. Possivelmente, a melhor forma para que o tomador de decisões identifique e modele problemas é conhecendo exemplos de aplicações de modelos em problemas análogos aos seus.

Em um modelo matemático, são incluídos três conjuntos principais de elementos:

- Variáveis de decisão e parâmetros: variáveis de decisão são as incógnitas a serem determinadas pela solução do modelo. Parâmetros são valores fixos no problema.
- Restrições: são regras que dizem o que se pode (ou não) fazer e /ou quais são as limitações dos recursos ou das atividades que estão associados ao modelo.
- Função Objetivo: é uma função matemática que define a qualidade da solução em função das variáveis de decisão. Ela pode ser de dois tipos: ou de minimização (de custos, erros, riqueza, chance de perda, desvio do objetivo) ou de maximização (de lucro, receitas, bem-estar, chance de sobrevivência).

O problema geral da P.L. pode ser definido por Maximizar (ou minimizar) uma função linear de variáveis, chamada de função objetivo:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Para um número qualquer *b* e uma função linear $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ define-se uma inequação linear como as inequações do tipo $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$ e $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$.

A condição de não-negatividade diz que os valores das variáveis serão não negativos. Essa é a condição lógica do modelo.

O modelo que representa matematicamente o problema em análise é resolvido por intermédio de um dos algoritmos que resolvem problemas de programação linear. O mais comum deles é o denominado algoritmo (ou método) Simplex, criado por Dantzig antes dos anos 50 (COLIN, 2007).

Uma solução viável é aquela cujos valores das variáveis atendem a todas as restrições. Uma solução ótima é aquela que além de ser viável gera um valor de função-objetivo extremo: maior valor dentre todos os existentes no caso de maximização e menor valor no caso da minimização.

2. Modelo Matemático para a indústria de farinha

O estudo de caso foi realizado num de moinho de trigo. A indústria em estudo possui capacidade de moagem de 280 t/24h de trigo em grãos, na qual são produzidas farinhas para os segmentos de: panificação, massas e uso doméstico. No processo de fabricação duas matérias-primas são utilizadas: trigo melhorador e trigo pão. Os custos e preços de mercado para as farinhas são estimados e estão dispostos na Tabela 1.

Descrição	Valor (R$/t)	Descrição	Valor (R$/t)
Custo do trigo pão	480,00	Preço de mercado farinha de panificação	940,00
Custo do trigo melhorador	545,00	Preço de mercado farinha para massas	1000,00
Custo de industrialização	100,00	Preço de mercado farinha para uso doméstico	1000,00

Fonte: Autores (2011)

Tabela 1: Informações de custos e preços

A Tabela 2 mostra as opções de moagem para a extração dos produtos.

Opção de moagem	% Extração farinha de panificação	% Extração farinha de massas	% Extração farinha para uso doméstico
1	0,75	0	0
2	0,45	0,30	0
3	0	0	0,75

Fonte: Autores (2011)

Tabela 2: Opções de moagem e extração de produtos

Na Tabela 3 é mostrada a condição para as matérias-primas.

	% na farinha de panificação	% na farinha de massas	% na farinha para uso doméstico	Estoque disponível (x1000 t)
Trigo melhorador	50	50	0	6
Trigo pão	50	50	100	4

Fonte: Autores (2011)

Tabela 3: Condição de matéria-prima

Parte das farinhas de panificação e massas são negociadas através de contratos, onde 500 t de farinha de massas e 1300 t de farinha de panificação já estão contratadas para o período (mês). A farinha para uso doméstico tem sua limitação fixada pela capacidade da linha de envase, em 700 t (mês) e limite mínimo de produção de 100t.

O problema consiste em maximizar o lucro considerando os recursos disponíveis e suas restrições.

2.1 Construção do Modelo

A indústria possui três produtos, matematicamente considerados três variáveis de decisão. Para cada produto inicialmente é calculada a margem bruta:

a) Farinha de panificação (x_1) da moagem 1 com margem bruta de R$ 327,50 /t;

b) Farinha de panificação (x_2) da moagem 2 com margem bruta de R$ 327,50

c) Farinha de massas (x_3) com margem bruta de R$ 387,50 / t;

d) Farinha para uso doméstico (x_4) R$ 420,00 / t.

2.1.1 Função Objetivo e Restrições

O modelo matemático para o problema proposto foi formulado conforme abaixo:

$$Max\ Lucro = 327{,}50\ x_1 + 327{,}50 x_2 + 387{,}50 x_3 + 420 x_4 \quad (1)$$

$$Sujeito\ \grave{a}: \quad x_1 + x_2 \geq 1300 \quad (2)$$

$$x_3 \geq 500 \quad (3)$$

$$x_4 \geq 100 \quad (4)$$

$$x_4 \leq 700 \quad (5)$$

$$x_2 \geq 1300 \quad (6)$$

$$\frac{x_1}{0,75}+\frac{x_3}{0,30}+\frac{x_4}{0,75}\leq 8400 \quad (7)$$

$$x_2 = 1,5x_3 \quad (8)$$

$$\frac{x_1}{1,5}+\frac{x_3}{0,6}\leq 6000 \quad (9)$$

$$2x_1+5x_3+3x_4\leq 12000 \quad (10)$$

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0,\quad x_4 \geq 0 \quad (11)$$

A função (1) é de maximizar o lucro com os produtos, através da margem bruta e quantidade de cada produto.

As restrições de demanda (2,3,4,5 e 6) compreendem os contratos de venda já fixados e a limitação da capacidade de envase da farinha para uso doméstico, já que se tem limitação nesta linha de envase de produto.

Na representação matemática é necessário ligar o consumo de horas de moagem as extrações por produto, considerando a capacidade de moagem de 280 t/ 24 h, que são as restrições de capacidade de máquina (7 e 8).

Como a extração máxima é de 75%, no mês a produção máxima de farinha de trigo será de 6300 t ou 8400 t de trigo industrializado.

Nas restrições de matéria-prima (9 e 10) é preciso fazer a conexão entre as extrações, opções de moagem e os percentuais de cada matéria-prima nos produtos, respeitando os limites de estoques das matérias primas.

Por fim é preciso estabelecer as restrições de não negatividade (11) para cada uma das variáves de decisão.

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0$$

3. Resultados

Para a resolução do modelo matemático foi utilizado o software *Solver*, da *Microsoft Excel*.

A tabela 4 apresenta as variáveis de decisão e os coeficientes da função objetivo do modelo. A tabela 5 apresenta os valores que deverão ser produzidos para maximizar lucro e o valor final da função objetivo.

Função Objetivo				
Variáveis	X1	X2	X3	X4
Coeficientes (margem bruta)	327,5	327,5	387,5	420

Fonte: Os autores (2011)

Tabela 4 – Variáveis de coeficientes da função objetivo

Variáveis	X1	X2	X3	X4
Valor de Var (toneladas)	0	3510	2340	100
Valor do lucro (R$)	2.098.275,00			

Fonte: Os autores (2011)

Tabela 5– Resultados das Variáveis e da Função Objetivo

Os valores a serem produzidos pela indústria são 3510 toneladas (t) de farinha de panificação, processada pela moagem 2, 2340 t de farinha de massas e 100 t de farinha para uso doméstico para obter um lucro máximo de R$ 2.098.275,00.

O relatório de sensibilidade é útil para avaliar quão sensível é a solução ótima a mudanças nos vários coeficientes do modelo. A tabela 7 apresenta os valores dos preços-sombra, dos possíveis acréscimos e decréscimos nos coeficientes da função objetivo e nas restrições. A restrição Lateral (R.H.) é o valor máximo disponível em cada restrição.

Os relatórios de sensibilidade proporcionam informação sobre a faixa de valores que os coeficientes da função objetivo podem assumir sem alterar a solução ótima, os preços-sombra, que indicam quanto irá mudar o valor da função objetivo se houver a alteração de uma unidade no fator de restrição indicado, permanecendo os demais coeficientes constantes.

O relatório de sensibilidade está apresentado na tabela 6.

Célula	**Nome**	**Final Valor**	**Reduzido Custo**	**Objetivo Coeficiente**	**Permissível Acréscimo**	**Permissível Decréscimo**
B3	X1	0	-24,00	327,5	24,00	0
C3	X2	3510	0	327,5	0	40,00
D3	X3	2340	0	387,5	0	60,00
E3	X4	100	0	420	107,25	0

Restrições

Célula	**Nome**	**Final Valor**	**Sombra Preço**	**Restrição Lateral R.H.**	**Permissível Acréscimo**	**Permissível Decréscimo**
C6	(2)	3510	0	1300	2210	0

C7	(3)	2340	0	500	1840	0
C8	(4)	100	-107,25	100	600	100
C9	(5)	100	0	700	0	600
C11	(6)	7933,333333	0	8400	0	466,6666667
C12	(7)	3510	327,5	0	0	2210
C13	(8)	3900	0	6000	0	2100
C14	(9)	12000	175,75	12000	700	7366,666667
C10	(10)	3510	0	1300	2210	0

Fonte: Os autores (2011)

Tabela 6 – Análise de Sensibilidade

As variações nos limites das restrições (lado direito da equação) permitem avaliar quão melhor ou pior a solução poderia ser com acréscimos ou decréscimos na disponibilidade/limitação de determinado recurso. Se na restrição (9) tivéssemos uma unidade a mais do recurso (12.000 para 12.001) o lucro aumentaria 175,75 (preço-sombra) e assim sucessivamente para os outros valores de preço-sombra (restrições 4 e 7).

O acréscimo permissível de aumento do recurso (9) é de 700 unidades e o decréscimo permissível é de 7366,66 unidades do recurso sem alteração do preço-sombra, e, consequentemente sem alterar o modelo encontrado.

4. Conclusões

As indústrias, precisamente os moinhos de farinha, constituem um cenário operacional onde há movimentação de quantidades de trigo necessárias para a produção de farinha, distribuídos em diversos tipos de moagem, com diferentes extrações de matérias-primas.

Neste trabalho, aborda-se um problema real de Produção de Farinhas, com restrições de capacidade de máquina, de matérias-primas e demanda. O problema consiste em determinar as quantidades de farinha dos tipos: panificação, massas e uso doméstico que maximizem a margem bruta da empresa.

Um modelo de programação linear foi proposto para representar esse cenário. O modelo foi resolvido utilizando o software *Solver* do *Excel*.

Dentre as vantagens da utilização do modelo proposto podem destacar-se: transformar em rotina as variáveis relevantes no processo de tomada de decisão; a análise de sensibilidade, pode ajudar na compreensão de como a solução do problema irá mudar se diferentes fatores do modelo mudarem.

Embora a farinha de trigo para uso doméstico na situação apresente maior margem, não é produzida até o limite de capacidade de envase (700 t) na solução proposta, contrariando uma análise simplista para decisão, comprovando a eficácia da programação linear como apoio à decisão.

Referências

ARENALES, M. *et al*. *Pesquisa Operacional*. São Paulo: Elsevier Editora Ltda, 2007.

PASSOS, E. *Programação linear como instrumento da pesquisa operacional.* São Paulo: Atlas, 2008.

MOREIRA, D. *Pesquisa operacional: curso introdutório.* São Paulo: Cencage Learning, 2010.

COLIN, E. *Pesquisa operacional: 170 aplicações em estretégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas.* Rio de Janeiro: LTC, 2001.